07/03/2018

Διάλεξη 4η

Μέτρα μεταβλητότητας

I	II	III
8	4	1
9	7	3
10	10	10 = m = $\bar{x}$
11	13	17
12	16	19
R = 4	12	18
S^2 = 2,5	22,5	110

Δειγματική Διακύμανση
ή Διασπορά

$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right]$$

$$S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}[\quad]$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2 f_i$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{k}x_i^2 f_i - n\bar{x}^2\right]$$

$$S'^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2 f_i$$

Δειγματική τυπική απόκλιση: $S = +\sqrt{S^2}$

$$S' = +\sqrt{(S')^2}$$

Chebyshev: $P(\mu - k\sigma \le x \le \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$

$$P(\bar{x} - kS \le x \le \bar{x} + kS) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Τουλάχιστο το $\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\cdot 100\%$ των μετρήσεων θα είναι στο $[\bar{x}-kS, \bar{x}+kS]$

Συντελεστής μεταβλητότητας: $C.V = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{s}{|\bar{x}|} \cdot 100\%$

Παράδειγμα 1: Εργοστάσιο φτιάχνει σωλήνες με μέση τιμή διαμέτρου και διακύμανση:

$\bar{x}_1 = 10$ cm, $s_1 = 0{,}05$ | $\bar{x}_2 = 3$ cm, $s_2 = 0{,}05$

$$\hookrightarrow C.V_1 = \frac{0{,}05}{10} \cdot 100\% < C.V_2 = \frac{0{,}05}{1} \cdot 100\%$$

Στην πρώτη περίπτωση το σύστημα έχει μεγαλύτερη ακρίβεια.

Παράδειγμα 2: Βαθμοί 1: 13, 16, 19 | $\bar{x} = 16$, $\boxed{s_1^2 = 9}$

Βαθμοί 2: 23, 26, 29 | $\bar{x} = 26$, $\boxed{s_2^2 = 9}$

Για την πρώτη περίπτωση: $C.V_1 = \frac{3}{16} \cdot 100\% > C.V_2 = \frac{3}{26} \cdot 100\%$ και την δεύτερη περ. ισχύει

↓

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των περιπτώσεων 1 κ' 2

~o~o~o~o~o~o~o~o~o~

Ροπές δείγματος $(x_1, \dots, x_n)$: Η ροπή πληθυσμού:

$$E(X^k),\ E(X-\mu)^k,\ E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^k$$

i) Δειγματική κεντρική (ή περί του μηδενός) ροπή k τάξης:

$$m_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (m_1 = \bar{x})$$

ii) Δειγματική κεντρική ροπή k τάξης:

$$v_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (v_2 = (s')^2)$$

iii) Δειγματική τυπική ή κανονικοποιημένη ροπή k τάξης:

$$a_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s'}\right)^k, \quad k = 2, \dots \quad \left(\begin{array}{l} a_3 = \text{συντελεστής συμμετρίας} \\ a_4 = \text{συντ. κυρτότητας} \end{array}\right)$$

Ροπογεννήτρια Συνάρτησης:

Για τ.μ. X : $m_X(t) = E(e^{tX})$

(i) $\mu_k = E(X^k) = \left.\dfrac{d^k m_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$

(ii) $m_X(t) = m_Y(t) \iff X$ και Y ισόνομες τ.μ.

(iii) $m_{aX+B}(t) = E(e^{(aX+B)t}) = e^{Bt} m_X(at)$

(iv) $m_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = m_{X_1}(t) \cdot \ldots \cdot m_{X_n}(t)$, για $X_1, \ldots, X_n$ ανεξ. τ.μ.

Στατιστικά - Δειγματικές ποσότητες:

A, B, $p = P(A)$, $100 (= n)$

65 → ναι στον A (από τους 100)

65% → A

X = αριθμός αυτών που υποστηρίζουν A.

$X = 65$ (από τους $n = 100$)

$X \sim Bn(n = 100, p = P(A))$

$\dfrac{X}{n} = \dfrac{65}{100} \approx p$

$\bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i}^{n} X_i$

$S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

↑ στατιστικά ή στατιστικές συναρτήσεις

$T = T(X_1, \ldots, X_n)$

$S = S(X_1, \ldots, X_n)$

$Y = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i \begin{cases} \to E(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) \\ \to Var(Y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i), \text{ για } X_1, \ldots, X_n \end{cases}$

ανεξ. τ.μ.

$\bar{X} = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$, $\quad S^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

Μέσες τιμές και διακυμάνσεις των $\bar{x}, s^2$

Θεώρημα 1: Έστω $X_1,\dots,X_n$ τ.δ. από πληθυσμό με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2.

Τότε (i) $E(\bar{x})=\mu$, (ii) $Var(\bar{x})=\frac{\sigma^2}{n}$, (iii) $E(s^2)=\sigma^2$.

Απόδ.

i) $E(\bar{x}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_i x_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu.$

ii) $Var(\bar{x}) = Var\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(x_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

iii) $E(s^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right] = E\left[\frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}-\mu)^2\right]\right] =$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} E(x_i-\mu)^2 - nE(\bar{x}-\mu)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n}\right] = \frac{1}{n-1}\left[n\sigma^2-\sigma^2\right]$$

$$= \underline{\underline{\sigma^2}}$$